A gallery model for level-zero representations of quantum affine algebras (Representation theory and related combinatorics)

AUTHOR(S):

石井, 基裕

数理解析研究所講究録
第1998巻 2016年 53-66

A gallery model for level-zero representations of quantum affine algebras

石井 基裕*
Motohiro Ishii

東北大学大学院情報科学研究科
純粋・応用数学研究センター

Research Center for Pure and Applied Mathematics,
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

(e-mail: ishii@math.is.tohoku.ac.jp)

Abstract

アフィン Weyl 群及び Weyl 小部屋の組合せ論を用いて，量子アフィン展開環の端ウェイト加群及びレベル・ゼロ基本加群 (のテンソル積) の結晶基底に対する組合せ論的な実現を与える．この実現を応用して，端ウェイト加群の結晶基底の各元に対応する Mirković–Vilonen サイクルの類似物を Feigin–Frenkel の半無限旗多様体の中に導入する．

1 導入

論文 [INS14] (内藤聡氏，佐垣大輔氏との共同研究) において筆者は半無限 LS パスの成すクリスタルを導入し，それが量子アフィン展開環のレベル・ゼロ端ウェイト加群の結晶基底 ([Kas94, Kas02]) の実現を与えることを示した．半無限 LS パスの定義には，アフィン Weyl 群上の半無限 Bruhat 順序を用いるが，これは Feigin–Frenkel ([FF90]) の半無限旗多様体の幾何学的な情報から取り出されるものであると考えられている (半無限旗多様体のトーラス固定点集合が自然にアフィン Weyl 群と同一視されることに注意せよ)．故に，上記の

*本研究は科学研究費補助金「研究活動スタート支援」(26887002) の補助を受けました．

研究結果は量子アフィン展開環のレベル・ゼロ表現論と半無限旗多様体の幾何学との間の何らかの関係を示唆するものであると考えることができる. 半無限旗多様体は半単純代数群のモジュラー表現論や小さい量子群の表現論と密接に関連することが知られている ([Lus80, ABBGM05, FM99, FFKM99]). また半無限旗多様体は, アフィン Grassmann 多様体のホモロジー (環) と有限次元旗多様体の小さい量子コホモロジー環との間の類似性を主張する Peterson の同型定理 ([LS10]) やその背後に現れる量子戸田格子 ([Kim99]) とも密接に関連している. 一方, 半無限旗多様体と量子アフィン展開環のレベル・ゼロ表現論との間の関係については, これまでにあまり知られていないようであるが, 最近 Braverman–Finkelberg ([BF14]) は, (ADE 型の) カレント代数の大域的及び局所的 Weyl 加群に対する Borel–Weil 的な実現を半無限旗多様体の幾何学的なモデルの一つである Drinfeld の準写像空間 ([FM99, FFKM99]) を用いることによって与え, 更にその次数付指標が量子戸田格子の固有関数 (q-Whittaker 関数) を与えることを示している.

本稿では簡約代数群の有限次元表現論とアフィン Grassmann 多様体との関係を記述する幾何学的佐武対応 ([MV07]), 特に Mirković–Vilonen サイクルや Mirković–Vilonen 多面体の理論 ([Kam10]), を参考にして量子アフィン展開環のレベル・ゼロ表現論と半無限旗多様体の幾何学との間の関係を記述するための一つの試みを行う. より具体的には, LS パス模型と Mirković–Vilonen サイクルとの間の対応を記述する Gaussent–Littelmann ([GL05]) の LS ギャラリー模型を, 半無限 LS パス模型の設定にまで拡張する. すなわち, 半無限 LS パス模型に対応するギャラリー模型を定式化し, それが端ウェイト加群の結晶基底に対する実現を与えることを示す (同様に量子 LS パス模型 ([LNSSS14]) に対応するギャラリー模型も導入する). 更にこの結果を応用して, 半無限旗多様体の中に Mirković–Vilonen サイクルの類似物を導入する. この Mirković–Vilonen サイクルの類似物には, 端ウェイト加群の構造が反映されていることが期待できるが, その詳しい性質を調べることは今後の課題である.

§2 ではアフィン・ルート系に関する基本事項を復習する．特に Kac–Moody 実現，及び Drinfeld 実現から来る部分ルート・データについて述べる．後者はレベル・ゼロ表現論及び半無限旗多様体と密接に関係している．§3 では量子アフィン展開環の基本的かつ重要なレベル・ゼロ加群である柏原 ([Kas02]) の端ウェイト加群とレベル・ゼロ基本加群について復習する．§4 では，§2 で導入した Drinfeld 実現から来る部分ルート・データを用いて半無限旗多様体に対する一つの記述を与え，いくつかの基本的な性質を示す．§5 では，Bott–Samelson 型の多様体を導入し，その極大トーラスの作用に関する固定点集合の中にギャラリー模型を定義する．そして，それらが結晶基底の実現を与えることを述べる．§6 ではギャラリー模型を応用して半無限旗多様体の中に Mirković–Vilonen サイクルの類似物を導入する．

謝辞． RIMS 研究集会「組合せ論的表現論と表現論的組合せ論」における講演の機会を与えて下さった世話人の沼田泰英氏に御礼申し上げます．

2 アフィン・ルート・データ

I を有限集合とし，$(\{\alpha_i\}_{i\in I} \subset P = \bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}\varpi_i, \{\check{\alpha}_i\}_{i\in I} \subset \check{P} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P,\mathbb{Z}))$ を有限型ルート・データとする．ただし $\{\alpha_i\}_{i\in I}$, $\{\check{\alpha}_i\}_{i\in I}$ はそれぞれ単純ルート，単純余ルートの集合であり，ϖ_i, $i \in I$, は基本ウェイトを表す．同様に $\check{\varpi}_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}\alpha_i, \mathbb{Z})$, $i \in I$, を基本余ウェイトとする．$W := \langle r_i \mid i \in I\rangle$ を有限 Weyl 群とし，$\Delta := \{w\alpha_i \mid w \in W, i \in I\}$, $\check{\Delta} := \{w\check{\alpha}_i \mid w \in W, i \in I\}$, $\check{\Delta}^+ := \check{\Delta} \cap \sum_{i\in I}\mathbb{Z}_{\geq 0}\check{\alpha}_i$, $\check{Q} := \bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}\check{\alpha}_i$ とおき，部分集合 $J \subset I$ に対して，

$$\begin{aligned}
\check{Q}_J &:= \textstyle\bigoplus_{j\in J}\mathbb{Z}\check{\alpha}_j,\\
\check{\Delta}_J &:= \check{\Delta} \cap \check{Q}_J,\\
\check{\Delta}_J^+ &:= \check{\Delta}_J \cap \check{\Delta}^+,\\
W_J &:= \langle r_{\check{\alpha}} \mid \check{\alpha} \in \check{\Delta}_J^+\rangle = \langle r_j \mid j \in J\rangle \subseteq W,\\
W^J &:= \{w \in W \mid w\check{\alpha} \in \check{\Delta}^+ \text{ for all } \check{\alpha} \in \check{\Delta}_J^+\}.
\end{aligned}$$

$I_{\mathrm{af}} := I \sqcup \{0\}$ とし, $(\{\alpha_i\}_{i\in I_{\mathrm{af}}} \subset P_{\mathrm{af}}, \{\check{\alpha}_i\}_{i\in I_{\mathrm{af}}} \subset \check{P}_{\mathrm{af}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_{\mathrm{af}}, \mathbb{Z}))$ を上記の有限型ルート・データに付随する (捩れのない) アフィン・ルート・データとする. ただし $P_{\mathrm{af}} := \bigoplus_{i\in I_{\mathrm{af}}} \mathbb{Z}\Lambda_i \oplus \mathbb{Z}\delta$ であり, $\theta \in \Delta^+$ を最高ルートとすると, $\delta := \alpha_0 + \theta$ である. また $\check{\theta} = \sum_{i\in I} \check{a}_i \check{\alpha}_i \in \check{\Delta}^+$ を θ に付随する余ルートとし, $\varpi_i = \Lambda_i - \check{a}_i \Lambda_0$ として $P \subset P_{\mathrm{af}}$ と見做す. $\langle -, - \rangle : \check{P}_{\mathrm{af}} \times P_{\mathrm{af}} \to \mathbb{Z}$ を自然なペアリング, $\kappa := \check{\alpha}_0 + \check{\theta} \in \check{P}_{\mathrm{af}}$ とすると, $\langle \check{\alpha}_i, \Lambda_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j \in I_{\mathrm{af}}$, $\langle \check{P}, \delta \rangle = \langle \kappa, P \rangle = \{0\}$ が成り立つ. $W_{\mathrm{af}} := \langle r_i \mid i \in I_{\mathrm{af}} \rangle$ をアフィン Weyl 群とする. $W_{\mathrm{af}} \cong W \ltimes \{t_\xi \mid \xi \in \check{Q}\}$ であることに注意せよ. ただし, t_ξ は $\xi \in \check{Q}$ に付随する平行移動を表す. $\check{\Delta}_{\mathrm{af}} := \{x\check{\alpha}_i \mid x \in W_{\mathrm{af}}, i \in I_{\mathrm{af}}\} \subseteq \{\check{\alpha} + n\kappa \mid \check{\alpha} \in \check{\Delta}, n \in \mathbb{Z}\}$, $\check{\Delta}^+_{\mathrm{af}} := \check{\Delta}_{\mathrm{af}} \cap \sum_{i\in I_{\mathrm{af}}} \mathbb{Z}_{\geq 0}\check{\alpha}_i = \check{\Delta}^+ \sqcup (\check{\Delta}_{\mathrm{af}} \cap \{\check{\alpha} + n\kappa \mid \check{\alpha} \in \check{\Delta}, n \in \mathbb{Z}_{>0}\})$ とおき, 部分集合 $J \subset I_{\mathrm{af}}$ に対して,

$$(\check{\Delta}_{\mathrm{af}})_J := \check{\Delta}_{\mathrm{af}} \cap \bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}\check{\alpha}_j,$$
$$(\check{\Delta}_{\mathrm{af}})^+_J := (\check{\Delta}_{\mathrm{af}})_J \cap \check{\Delta}^+_{\mathrm{af}},$$
$$(W_{\mathrm{af}})_J := \langle r_{\check{\beta}} \mid \check{\beta} \in (\check{\Delta}_{\mathrm{af}})^+_J \rangle = \langle r_j \mid j \in J \rangle \subseteq W_{\mathrm{af}},$$
$$(W_{\mathrm{af}})^J := \{x \in W_{\mathrm{af}} \mid x\check{\beta} \in \check{\Delta}^+_{\mathrm{af}} \text{ for all } \check{\beta} \in (\check{\Delta}_{\mathrm{af}})^+_J\}.$$

ただし, $\check{\beta} \in \check{\Delta}^+_{\mathrm{af}}$ に対して $r_{\check{\beta}} \in W_{\mathrm{af}}$ を対応する鏡映とする. 同様に部分集合 $J \subsetneq I_{\mathrm{af}}$ に対して, 次を導入する:

$$(\check{\Delta}_J)_{\mathrm{af}} := \check{\Delta}_{\mathrm{af}} \cap \{\check{\alpha} + n\kappa \mid \check{\alpha} \in (\check{\Delta}_{\mathrm{af}})_J, n \in \mathbb{Z}\},$$
$$(\check{\Delta}_J)^+_{\mathrm{af}} := (\check{\Delta}_J)_{\mathrm{af}} \cap \check{\Delta}^+_{\mathrm{af}},$$
$$(W_J)_{\mathrm{af}} := \langle r_{\check{\beta}} \mid \check{\beta} \in (\check{\Delta}_J)^+_{\mathrm{af}} \rangle \subseteq W_{\mathrm{af}},$$
$$(W^J)_{\mathrm{af}} := \{x \in W_{\mathrm{af}} \mid x\check{\beta} \in \check{\Delta}^+_{\mathrm{af}} \text{ for all } \check{\beta} \in (\check{\Delta}_J)^+_{\mathrm{af}}\}.$$

このとき, 次の同型が成り立つ:

$$(W_J)_{\mathrm{af}} \cong \begin{cases} (W_{\mathrm{af}})_J \ltimes \{t_\xi \mid \xi \in \check{Q}_J\} & \text{if } 0 \notin J, \\ (W_{\mathrm{af}})_J \ltimes \{t_\xi \mid \xi \in \check{Q}_{J\setminus\{0\}} \oplus \mathbb{Z}\check{\theta}\} & \text{if } 0 \in J. \end{cases}$$

W_{af} 上の Bruhat 順序を $\leq$ で表す.

補題 2.1. (1) 自然な写像 $W^J \xrightarrow{\sim} W/W_J$, $w \mapsto wW_J$, は全単射を与える. 更に, 次が成り立つ:

$$W^J = \{w \in W \mid w \le wv \textit{ for all } v \in W_J\}.$$

(2) 自然な写像 $(W_{\mathrm{af}})^J \xrightarrow{\sim} W_{\mathrm{af}}/(W_{\mathrm{af}})_J$, $x \mapsto x(W_{\mathrm{af}})_J$, は全単射を与える. 更に, 次が成り立つ:

$$(W_{\mathrm{af}})^J = \{x \in W_{\mathrm{af}} \mid x \le xy \textit{ for all } y \in (W_{\mathrm{af}})_J\}.$$

(3) 自然な写像 $(W^J)_{\mathrm{af}} \xrightarrow{\sim} W_{\mathrm{af}}/(W_J)_{\mathrm{af}}$, $x \mapsto x(W_J)_{\mathrm{af}}$, は全単射を与える. 更に, 次が成り立つ:

$$(W^J)_{\mathrm{af}} = \{x \in W_{\mathrm{af}} \mid x \le xy \textit{ for all } y \in (W_J)_{\mathrm{af}}\}.$$

注意 2.2. 補題 2.1 の (1), (2) は Coxeter 群の基本的性質である. (3) は 1990 年代初めには既に知られていた事実であるが, 証明については例えば [LS10, §10.3] を参照せよ.

3 量子アフィン展開環上のレベル・ゼロ加群

$\check{\mathfrak{g}}_{\mathrm{af}}$ を §2 で導入したアフィン・ルート・データの Langlands 双対 $(\{\check{\alpha}_i\}_{i\in I_{\mathrm{af}}} \subset \check{P}_{\mathrm{af}}, \{\alpha_i\}_{i\in I_{\mathrm{af}}} \subset P_{\mathrm{af}})$ に付随する (一般には捩れのある) アフィン Lie 環とし, $\check{\mathfrak{g}} \subset \check{\mathfrak{g}}_{\mathrm{af}}$ を部分ルート・データ $(\{\check{\alpha}_i\}_{i\in I} \subset \check{P}, \{\alpha_i\}_{i\in I} \subset P)$ に対応する有限次元複素単純 Lie 部分環とする. また $\check{\mathfrak{g}}'_{\mathrm{af}} := [\check{\mathfrak{g}}_{\mathrm{af}}, \check{\mathfrak{g}}_{\mathrm{af}}] \subset \check{\mathfrak{g}}_{\mathrm{af}}$ とおき, $\mathbf{L}\check{\mathfrak{g}} := \check{\mathfrak{g}}'_{\mathrm{af}}/\mathbb{C}\delta$ を $\check{\mathfrak{g}}$ に付随する (一般には捩れのある) ループ代数とする. $U_q(\check{\mathfrak{g}})$, $U_q(\check{\mathfrak{g}}_{\mathrm{af}})$, $U_q(\mathbf{L}\check{\mathfrak{g}})$ をそれぞれ $\check{\mathfrak{g}}$, $\check{\mathfrak{g}}_{\mathrm{af}}$, $\mathbf{L}\check{\mathfrak{g}}$ に付随する量子展開環とする. 以下, $\check{\mathfrak{g}}$ の優整ウェイト $\check{\lambda} = \sum_{i\in I} m_i \check{\varpi}_i \in \check{P}$, $m_i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, を一つ固定する.

$L(\check{\lambda})$ を最高ウェイト $\check{\lambda}$ の有限次元既約最高ウェイト $U_q(\check{\mathfrak{g}})$-加群とし, その結晶基底を $B(\check{\lambda})$ とする.

$\mathcal{W}_{\mathrm{glo}}(\check{\lambda})$ を端ウェイト $\check{\lambda}$ の端ウェイト $U_q(\check{\mathfrak{g}}_{\mathrm{af}})$-加群とし, その結晶基底を $\mathcal{B}_{\mathrm{glo}}(\check{\lambda})$ とする ([Kas94, Kas02]). これは $u_{\check{\lambda}}$ によって生成される可積分加群であって, $u_{\check{\lambda}}$ がウェイト $\check{\lambda}$ の端ウェイト・ベクトルであるという関係式によって定義される $U_q(\check{\mathfrak{g}}_{\mathrm{af}})$-加群である. また $\langle\check{\lambda},\delta\rangle = 0$ であることから, $\mathcal{W}_{\mathrm{glo}}(\check{\lambda})$ は $U_q(\mathbf{L}\check{\mathfrak{g}})$ 上の加群となる. このとき (少なくとも ADE 型の場合には) $\mathcal{W}_{\mathrm{glo}}(\check{\lambda})$ は $U_q(\mathbf{L}\check{\mathfrak{g}})$ の Drinfeld 実現から来る三角分解に関する普遍的可積分最高ウェイト加群と同型であり, 大域的 Weyl $U_q(\mathbf{L}\check{\mathfrak{g}})$-加群とも呼ばれている ([CP01]).

正整数 d_i を $\{d \in \mathbb{Z} \mid \check{\varpi}_i + d\kappa \in W_{\mathrm{af}}\check{\varpi}_i\} = \mathbb{Z}d_i$ によって定める. $\mathcal{W}_{\mathrm{glo}}(\check{\varpi}_i)$ 上にはウェイトを $d_i\kappa$ ずらす $U_q(\mathbf{L}\check{\mathfrak{g}})$-加群同型 $z_i : u_{\check{\varpi}_i} \mapsto u_{\check{\varpi}_i+d_i\kappa}$ が存在し, $\mathcal{W}_{\mathrm{loc}}(\check{\varpi}_i) := \mathcal{W}_{\mathrm{glo}}(\check{\varpi}_i)/(z_i - \mathrm{id})\mathcal{W}_{\mathrm{glo}}(\check{\varpi}_i)$ は有限次元の既約 $U_q(\mathbf{L}\check{\mathfrak{g}})$-加群となる. $\mathcal{W}_{\mathrm{loc}}(\check{\varpi}_i)$ をレベル・ゼロ基本加群と呼ぶ ([Kas02]). $\mathcal{W}_{\mathrm{loc}}(\check{\lambda}) := \bigotimes_{i\in I} \mathcal{W}_{\mathrm{loc}}(\check{\varpi}_i)^{\otimes m_i}$ の結晶基底を $\mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(\check{\lambda}) = \bigotimes_{i\in I} \mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(\check{\varpi}_i)^{\otimes m_i}$ とおく. $\mathcal{W}_{\mathrm{loc}}(\check{\lambda})$ は $U_q(\mathbf{L}\check{\mathfrak{g}})$ の Drinfeld 実現から来る三角分解に関する普遍的有限次元最高ウェイト加群と同型であり, 局所的 Weyl $U_q(\mathbf{L}\check{\mathfrak{g}})$-加群とも呼ばれている ([CP01]).

$\mathcal{B}_{\mathrm{glo}}(\check{\lambda})$, $\mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(\check{\lambda})$ 上には W_{af} が作用する ([Kas94]).

補題 3.1 ([Kas02, INS14]). $J = \{i \in I \mid \langle\check{\lambda},\alpha_i\rangle = 0\}$ とすると次が成立:

$$(W_J)_{\mathrm{af}} = \{x \in W_{\mathrm{af}} \mid x \cdot u_{\check{\lambda}} = u_{\check{\lambda}} \ in\ \mathcal{B}_{\mathrm{glo}}(\check{\lambda})\}.$$

4 半無限旗多様体

G を $(\{\alpha_i\}_{i\in I} \subset P, \{\check{\alpha}_i\}_{i\in I} \subset \check{P})$ に付随する単連結複素概単純代数群とし, $\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする. また, $\mathfrak{g}$ の Langlands 双対 Lie 環を $\check{\mathfrak{g}}$ とし, $\mathfrak{g}$ に付随する (捩れのない) アフィン Lie 環の Langlands 双対 Lie 環を $\check{\mathfrak{g}}_{\mathrm{af}}$ とする. G の $\mathbb{C}((t))$, $\mathbb{C}[t^{\pm}]$, $\mathbb{C}[\![t]\!]$, 及び $\mathbb{C}[t]$-有理点のなす群をそれぞれ $G((t))$, $G[t^{\pm}]$, $G[\![t]\!]$, 及び $G[t]$ と表す. 与えられた単純ルート系に対応する極大トーラスと Borel 部分群を $T \subset B \subset G$ とし, $U \subset B$ をベキ単根基とする. このとき $B = T \ltimes U$ である. $N = N_G(T)$ を G における T の正規化群とする. すると (B, N) は

Tits 系を成し, $W \cong N/T$ かつ以下の Bruhat 分解が成り立つ:

$$G = \langle B, N \rangle = \bigsqcup_{w \in W} BwB.$$

部分集合 $J \subset I$ に対応する放物型部分群を以下で定める:

$$P_J := \bigsqcup_{w \in W_J} BwB.$$

$K \subsetneq J \subseteq I$ に対して, P_J/P_K を (J, K) 型の旗多様体と呼ぶ. ここで $W_J^K := W_J \cap W^K$ とおくと, 次の Schubert 分解が成り立つ:

$$P_J/P_K = \bigsqcup_{w \in W_J^K} BwB/P_K.$$

次に $\mathrm{ev}_0 : G[\![t]\!] \to G$ を $t = 0$ における値をとる写像とし, $\mathcal{I} := \mathrm{ev}_0^{-1}(B)$ を $G(\!(t)\!)$ の岩堀部分群とする. $\mathcal{N} := \langle N, T(\!(t)\!)\rangle \subset G(\!(t)\!)$ とすると $(\mathcal{I}, \mathcal{N})$ は Tits 系を成し, $W_{\mathrm{af}} \cong \mathcal{N}/(\mathcal{I} \cap \mathcal{N})$ かつ以下の Bruhat 分解が成り立つ:

$$G(\!(t)\!) = \langle \mathcal{I}, \mathcal{N} \rangle = \bigsqcup_{x \in W_{\mathrm{af}}} \mathcal{I}x\mathcal{I}.$$

部分集合 $J \subset I_{\mathrm{af}}$ に対応する放物型岩堀部分群を以下で定める:

$$\mathcal{I}_J := \bigsqcup_{x \in (W_{\mathrm{af}})_J} \mathcal{I}x\mathcal{I}.$$

$K \subsetneq J \subseteq I_{\mathrm{af}}$ に対して, $\mathcal{I}_J/\mathcal{I}_K$ を (J, K) 型のアフィン旗多様体と呼ぶ. ここで $(W_{\mathrm{af}})_J^K := (W_{\mathrm{af}})_J \cap (W_{\mathrm{af}})^K$ とおくと, 次の Schubert 分解が成り立つ:

$$\mathcal{I}_J/\mathcal{I}_K = \bigsqcup_{x \in (W_{\mathrm{af}})_J^K} \mathcal{I}x\mathcal{I}/\mathcal{I}_K.$$

特に (I_{af}, I) 型のアフィン旗多様体 $\mathcal{G}_G = G(\!(t)\!)/G[\![t]\!]$ のことを G のアフィン Grassmann 多様体と呼ぶ.

$\mathcal{B} := \langle U(\!(t)\!), T[\![t]\!]\rangle = U(\!(t)\!) \rtimes T[\![t]\!] \subset G(\!(t)\!)$ とおく. 同様に $\tilde{\mathcal{B}} := \langle U[t^{\pm 1}], T\rangle = U[t^{\pm 1}] \rtimes T$, $\tilde{\mathcal{N}} := \langle N, T[t^{\pm 1}]\rangle \subset G[t^{\pm 1}]$ と定める. $T = T[t]$ に注意せよ. $(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ 及び $(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{N}})$ は Tits 系ではないが, 次の性質を満たす:

補題 4.1. (T1) $G((t)) = \langle \mathcal{B}, \mathcal{N} \rangle$, $G[t^{\pm 1}] = \langle \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{N}} \rangle$.

(T2) $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = T[\![t]\!]$, $\tilde{\mathcal{B}} \cap \tilde{\mathcal{N}} = T$, $\mathcal{N}/(\mathcal{B} \cap \mathcal{N}) \cong \tilde{\mathcal{N}}/(\tilde{\mathcal{B}} \cap \tilde{\mathcal{N}}) \cong W_{\mathrm{af}}$.

(T3) $s = r_{\check{\alpha}_i + n\kappa} \in W_{\mathrm{af}}$, $i \in I_{\mathrm{af}}$, $n \in \mathbb{Z}$, に対して $s\mathcal{B}s \neq \mathcal{B}$, $s\tilde{\mathcal{B}}s \neq \tilde{\mathcal{B}}$.

(T4) $i \in I_{\mathrm{af}}$, $x \in W_{\mathrm{af}}$ に対して $\mathcal{B}(W_{\{i\}})_{\mathrm{af}} \mathcal{B} x \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(W_{\{i\}})_{\mathrm{af}} x \mathcal{B}$.

注意 4.2. (T1) は [Ste67, Corollary 3 in p. 115] から従う. また $(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{N}})$ に対して (T4) に相当する主張は成立しない.

補題 4.1 より, $(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ に対する次の Bruhat 型の分解が成り立つ:

$$G((t)) = \langle \mathcal{B}, \mathcal{N} \rangle = \bigsqcup_{x \in W_{\mathrm{af}}} \mathcal{B} x \mathcal{B}. \tag{4.1}$$

部分集合 $J \subsetneq I_{\mathrm{af}}$ に対して, 次の部分群を導入する:

$$\mathcal{P}_J := \bigsqcup_{x \in (W_J)_{\mathrm{af}}} \mathcal{B} x \mathcal{B}, \qquad \tilde{\mathcal{P}}_J := G[t^{\pm 1}] \cap \mathcal{P}_J.$$

定義 4.3 (cf. [FF90]). $K \subsetneq J \subseteq I_{\mathrm{af}}$ に対して, $\mathcal{P}_J/\mathcal{P}_K$ 及び $\tilde{\mathcal{P}}_J/\tilde{\mathcal{P}}_K$ を (J, K) 型の半無限旗多様体と呼ぶ. ここで $(W_J^K)_{\mathrm{af}} := (W_J)_{\mathrm{af}} \cap (W^K)_{\mathrm{af}}$ とおくと, 次の Schubert 型の分解が成り立つ:

$$\mathcal{P}_J/\mathcal{P}_K = \bigsqcup_{w \in (W_J^K)_{\mathrm{af}}} \mathcal{B} w \mathcal{B}/\mathcal{P}_K.$$

5 ギャラリー模型

$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \check{P}$ 上への W_{af} のアフィン変換による作用を考える. $\alpha \in \Delta$, $m \in \mathbb{Z}$ に対して $H_{\alpha,m} := \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \langle h, \alpha \rangle = m\}$ と定め, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta} H_{\alpha,0}$ 及び $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta, m \in \mathbb{Z}} H_{\alpha,m}$ の連結成分を Weyl 部屋及び Weyl 小部屋と呼ぶ. このとき, Weyl 小部屋 $A^+ := \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid 0 < \langle h, \alpha_i \rangle \ (i \in I), \langle h, -\alpha_0 \rangle < 1\}$ を含む唯一つの Weyl 部屋 C^+ が存在する. W 及び W_{af} はそれぞれ Weyl 部屋全体の集合及び Weyl 小部屋全体の集合に単純推移的に作用している.

$\check{\lambda} = \sum_{i \in I} m_i \check{\varpi}_i \in \check{P}$, $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, を G の優整余指標とし, $J = \{i \in I \mid \langle \check{\lambda}, \alpha_i \rangle = 0\}$ とおく. また原点 $0 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ から $\check{\lambda} \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ への極小なギャラリーを一つ固定する:

$$\gamma_{\check{\lambda}} = \left(\{0\} = \Upsilon'_0 \subset \Upsilon_0 \supset \Upsilon'_1 \subset \Upsilon_1 \supset \cdots \subset \Upsilon_{n-1} \supset \Upsilon'_n \subset \Upsilon_n \supset \Upsilon'_{n+1} = \{\check{\lambda}\}\right).$$

ただし, 各 Υ_k, Υ'_k は $\bigcap_{j \in J} H_{\alpha_j,0}$ に属するある小部屋の閉包の面であり, Υ_k の次元は $\bigcap_{j \in J} H_{\alpha_j,0}$ のそれに等しく, Υ'_k は余次元 1 である. また, これが極小であるとは, 長さ n が最小であることを意味する.

F_k, F'_k, 及び $v_{\check{\lambda}}$ を $\overline{A^+}$ の面であって, ある $x_k, x'_k, x \in W_{\mathrm{af}}$ について $\Upsilon_k = x_k(F_k)$, $\Upsilon'_k = x'_k(F'_k)$, 及び $\{\check{\lambda}\} = x(v_{\check{\lambda}})$ となるものとする.

$$K_k := \{i \in I_{\mathrm{af}} \mid r_i = r_{\beta,m} \text{ for some } \beta \in \Delta^+,\ m \in \mathbb{Z},\ \text{with } F_k \subseteq H_{\beta,m}\},$$

$$J_k := \{i \in I_{\mathrm{af}} \mid r_i = r_{\beta,m} \text{ for some } \beta \in \Delta^+,\ m \in \mathbb{Z},\ \text{with } F'_k \subseteq H_{\beta,m}\}$$

とおく. ただし, $r_{\beta,m} \in W_{\mathrm{af}}$ はアフィン超平面 $H_{\beta,m}$ に関する鏡映を表す.

定義 5.1 (cf. [GL05]). (1) 型 $\gamma_{\check{\lambda}}$ の Bott–Samelson 多様体を次で定める:

$$\mathrm{BS}(\gamma_{\check{\lambda}}) := G[\![t]\!] \times_{\mathcal{I}_{K_0}} \mathcal{I}_{J_1} \times_{\mathcal{I}_{K_1}} \cdots \times_{\mathcal{I}_{K_{n-1}}} \mathcal{I}_{J_n} / \mathcal{I}_{K_n}.$$

ただし, 右辺は $g = (g_0, g_1, \ldots, g_n) \in G[\![t]\!] \times \mathcal{I}_{J_1} \times \cdots \times \mathcal{I}_{J_n}$ への右からの $b = (b_0, b_1, \ldots, b_n) \in \mathcal{I}_{K_0} \times \mathcal{I}_{K_1} \times \cdots \times \mathcal{I}_{K_n}$ の作用 $g \cdot b = (g_0 b_0, b_0^{-1} g_1 b_1, \ldots, b_{n-1}^{-1} g_n b_n)$ による剰余集合を表す.

(2) 型 $\gamma_{\check{\lambda}}$ の Bott–Samelson 型多様体を次で定める:

$$\mathrm{BS}^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_{\check{\lambda}}) := G(\!(t)\!) \times_{\mathcal{P}_{K_0}} \mathcal{P}_{J_1} \times_{\mathcal{P}_{K_1}} \cdots \times_{\mathcal{P}_{K_{n-1}}} \mathcal{P}_{J_n} / \mathcal{P}_{K_n}.$$

補題 5.2. *(1)* $\mathrm{BS}(\gamma_{\check{\lambda}})$ の T-固定点集合 $\Gamma(\gamma_{\check{\lambda}})$ は次で与えられる:

$$\begin{aligned} & W \times_{(W_{\mathrm{af}})_{K_0}} (W_{\mathrm{af}})_{J_1} \times_{(W_{\mathrm{af}})_{K_1}} \cdots \times_{(W_{\mathrm{af}})_{K_{n-1}}} (W_{\mathrm{af}})_{J_n} / (W_{\mathrm{af}})_{K_n} \\ & \cong W^{K_0} \times (W_{\mathrm{af}})_{J_1}^{K_1} \times \cdots \times (W_{\mathrm{af}})_{J_{n-1}}^{K_{n-1}} \times (W_{\mathrm{af}})_{J_n}^{K_n}. \end{aligned}$$

(2) $\mathrm{BS}^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_{\check{\lambda}})$ の T-固定点集合 $\Gamma^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_{\check{\lambda}})$ は次で与えられる:

$$\begin{aligned} &W_{\mathrm{af}} \times_{(W_{K_0})_{\mathrm{af}}} (W_{J_1})_{\mathrm{af}} \times_{(W_{K_1})_{\mathrm{af}}} \cdots \times_{(W_{K_{n-1}})_{\mathrm{af}}} (W_{J_n})_{\mathrm{af}}/(W_{K_n})_{\mathrm{af}} \\ &\cong (W^{K_0})_{\mathrm{af}} \times (W_{J_1}^{K_1})_{\mathrm{af}} \times \cdots \times (W_{J_{n-1}}^{K_{n-1}})_{\mathrm{af}} \times (W_{J_n}^{K_n})_{\mathrm{af}}. \end{aligned}$$

補題 5.2 より自然な埋め込み $\Gamma(\gamma_{\check{\lambda}}) \hookrightarrow \Gamma^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_{\check{\lambda}})$ 及び自然な全射 $\Gamma^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_{\check{\lambda}}) \twoheadrightarrow \Gamma(\gamma_{\check{\lambda}})$ が存在することが分かる.

各 $\gamma = [w_0, w_1, \ldots, w_n] \in \Gamma(\gamma_{\check{\lambda}})$ に対して, $\Sigma_k := w_0 \cdots w_k(F_k)$, $0 \le k \le n$, によって 0 から $\check{\mu} := w_0 \cdots w_n(v_{\check{\lambda}}) \in \check{P}$ へのギャラリー

$$(\{0\} = \Sigma_0' \subset \Sigma_0 \supset \Sigma_1' \subset \Sigma_1 \supset \cdots \subset \Sigma_{n-1} \supset \Sigma_n' \subset \Sigma_n \supset \Sigma_{n+1}' = \{\check{\mu}\})$$

が定まる. この対応は単射なので, 以下 $\Gamma(\gamma_{\check{\lambda}})$ の元をギャラリーと見做す.

次に $\Gamma(\gamma_{\check{\lambda}}) \sqcup \{\mathbf{0}\}$ 上にルート作用素 $e_{\check{\alpha}}$, $f_{\check{\alpha}}$, $\alpha \in \{\alpha_i\ (i \in I),\ -\theta\}$, を定める ([GL05, §6]). まず $e_{\check{\alpha}}$ の定義を述べる. 今, $m \in \mathbb{Z}$ をある $0 \le p \le n+1$ について $\Sigma_p' \subset H_{\alpha,m}$ となる最小のものとする. すると $m \le 0$ である. もしも $m = 0$ ならば $e_{\check{\alpha}}\gamma := \mathbf{0}$ と定める. また $m < 0$ のとき, $0 < k \le n+1$ を $\Sigma_k' \subset H_{\alpha,m}$ となる最小のものとし, $\Sigma_j' \subset H_{\alpha,m+1}$ なる最大の $0 \le j < k$ を取る. このとき, $e_{\check{\alpha}}\gamma \in \Gamma(\gamma_{\check{\lambda}})$ を次で定める:

$$e_{\check{\alpha}}\gamma := (\{0\} \subset \Omega_0 \supset \Omega_1' \subset \Omega_1 \supset \cdots \subset \Omega_{n-1} \supset \Omega_n' \subset \Omega_n \supset \{\check{\mu} + \check{\alpha}\}),$$

$$\Omega_l := \begin{cases} \Sigma_l & \text{for } l \le j-1, \\ r_{\alpha,m+1}(\Sigma_l) & \text{for } j \le l \le k-1, \\ t_{\check{\alpha}}(\Sigma_l) & \text{for } k \le l. \end{cases}$$

次に $f_{\check{\alpha}}$ の定義を述べる. まず $\langle \check{\mu}, \alpha \rangle \ge m$ であることに注意して, もしも $\langle \check{\mu}, \alpha \rangle = m$ ならば $f_{\check{\alpha}}\gamma := \mathbf{0}$ と定める. また, $\langle \check{\mu}, \alpha \rangle > m$ のとき, $0 \le j < n+1$ を $\Sigma_j' \subset H_{\alpha,m}$ なる最大のものとし, $\Sigma_k' \subset H_{\alpha,m+1}$ なる最小の $j < k \le n+1$ を取る. このとき $f_{\check{\alpha}}\gamma \in \Gamma(\gamma_{\check{\lambda}})$ を次で定める:

$$f_{\check{\alpha}}\gamma := (\{0\} \subset \Omega_0 \supset \Omega_1' \subset \Omega_1 \supset \cdots \subset \Omega_{n-1} \supset \Omega_{n-1}' \subset \Omega_n \supset \{\check{\mu} - \check{\alpha}\}),$$

$$\Omega_l := \begin{cases} \Sigma_l & \text{for } l \le j-1, \\ r_{\alpha,m}(\Sigma_l) & \text{for } j \le l \le k-1, \\ t_{-\check{\alpha}}(\Sigma_l) & \text{for } k \le l. \end{cases}$$

以下 $e_i := e_{\check{\alpha}_i}$, $f_i := f_{\check{\alpha}_i}$ $(i \in I)$, $e_0 := e_{-\check{\theta}}$, $f_0 := f_{-\check{\theta}}$ とし，これらの生成するモノイド $\mathcal{A} := \langle e_i, f_i \mid i \in I \rangle \subseteq \mathcal{A}_{\mathrm{af}} := \langle e_i, f_i \mid i \in I_{\mathrm{af}} \rangle$ を導入する．自然な全射 $\Gamma^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_{\check{\lambda}}) \twoheadrightarrow \Gamma(\gamma_{\check{\lambda}})$ と整合性が取れるように $\Gamma^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_{\check{\lambda}})$ 上にルート作用素 $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ $(i \in I_{\mathrm{af}})$ を定めることが出来る．同様に $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{af}} := \langle \tilde{e}_i, \tilde{f}_i \mid i \in I_{\mathrm{af}} \rangle$ とおく．

定義 5.3. $\check{\lambda} \in \check{P}$ を G の優整余指標とする．

(1) ([GL05]). $\Gamma_{\mathrm{LS}}(\gamma_{\check{\lambda}}) := \mathcal{A} \cdot \gamma_{\check{\lambda}} \setminus \{\mathbf{0}\} = \{D(\gamma_{\check{\lambda}}) \in \Gamma(\gamma_{\check{\lambda}}) \mid D \in \mathcal{A}\}$ と定め，これを型 $\gamma_{\check{\lambda}}$ の LS ギャラリーの成すクリスタルと呼ぶ．

(2) $\Gamma_{\mathrm{QLS}}(\gamma_{\check{\lambda}}) := \mathcal{A}_{\mathrm{af}} \cdot \gamma_{\check{\lambda}} \setminus \{\mathbf{0}\} = \{D(\gamma_{\check{\lambda}}) \in \Gamma(\gamma_{\check{\lambda}}) \mid D \in \mathcal{A}_{\mathrm{af}}\}$ と定め，これを型 $\gamma_{\check{\lambda}}$ の量子 LS ギャラリーの成すクリスタルと呼ぶ．

(3) $\Gamma^{\frac{\infty}{2}}_{\mathrm{LS},0}(\gamma_{\check{\lambda}}) := \tilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{af}} \cdot \gamma_{\check{\lambda}} \setminus \{\mathbf{0}\} = \{D(\gamma_{\check{\lambda}}) \in \Gamma^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_{\check{\lambda}}) \mid D \in \tilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{af}}\}$ と定め，これを $\gamma_{\check{\lambda}}$ を含む型 $\gamma_{\check{\lambda}}$ の半無限 LS ギャラリーの成すクリスタルの連結成分と呼ぶ．

次の定理が本稿の主結果である．

定理 5.4. $\check{\lambda} \in \check{P}$ を G の優整余指標とする．

(1) ([GL05]). $U_q(\check{\mathfrak{g}})$-クリスタルの同型 $\Gamma_{\mathrm{LS}}(\gamma_{\check{\lambda}}) \cong B(\check{\lambda})$ が成り立つ．

(2) $U_q(\mathbf{L}\check{\mathfrak{g}})$-クリスタルの同型 $\Gamma_{\mathrm{QLS}}(\gamma_{\check{\lambda}}) \cong \mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(\check{\lambda})$ が成り立つ．

(3) $U_q(\check{\mathfrak{g}}_{\mathrm{af}})$-クリスタルの同型 $\Gamma^{\frac{\infty}{2}}_{\mathrm{LS},0}(\gamma_{\check{\lambda}}) \cong \mathcal{B}_{\mathrm{glo},0}(\check{\lambda})$ が成り立つ．ただし，右辺は $u_{\check{\lambda}}$ を含む $\mathcal{B}_{\mathrm{glo}}(\check{\lambda})$ の連結成分を表す．

注意 5.5. $\check{\lambda} = \sum_{i \in I} m_i \check{\varpi}_i \in \check{P}$, $m_i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, を $\check{\mathfrak{g}}$ の優整ウェイトとし，

$$\mathrm{Par}(\check{\lambda}) := \{\boldsymbol{\rho} = (\rho^{(i)})_{i \in I} \mid \rho^{(i)} \text{ は長さが } m_i \text{ 未満の分割}\}$$

と定める. $\mathrm{Par}(\check{\lambda})$ 上には $e_i\boldsymbol{\rho} = f_i\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$, $\mathrm{wt}(\boldsymbol{\rho}) = -\sum_{i\in I}|\rho^{(i)}|d_i\kappa$ として $U_q(\check{\mathfrak{g}}_{\mathrm{af}})$-クリスタルの構造が定まる. すると, Beck–中島 ([BN04]) による柏原の予想 ([Kas02, §13]) の解決により, 次のクリスタルの同型が成り立つ:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{glo}}(\check{\lambda}) \cong \mathrm{Par}(\check{\lambda}) \otimes \mathcal{B}_{\mathrm{glo},0}(\check{\lambda}).$$

6 Mirković–Vilonen サイクルの類似物

$\check{\lambda} \in \check{P}$ を G の優整余指標とし, $J = \{i \in I \mid \langle\check{\lambda}, \alpha_i\rangle = 0\}$ とおく. 今, $\rho \in \check{P}$ を G の非退化な優整余指標とし, レトラクション写像 $\hat{r}_{w_\circ w} : \mathrm{BS}^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_{\check{\lambda}}) \twoheadrightarrow \Gamma^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_{\check{\lambda}})$, $w \in W$, を $\hat{r}_{w_\circ w}(\gamma) := \lim_{t\to 0}(w\rho)(t)\cdot\gamma$ によって定める. ただし $w_\circ \in W$ は最長元を表す. $\gamma \in \Gamma^{\frac{\infty}{2}}_{\mathrm{LS},0}(\gamma_{\check{\lambda}})$ に対して $\Xi_w(\gamma) := w \cdot \tilde{e}^{\max}_w(\gamma) \in \Gamma^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_{\check{\lambda}})$, $w \in W$, とおく. 自然な全射 $\pi_{\check{\lambda}} : \mathrm{BS}^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_{\check{\lambda}}) \twoheadrightarrow G(\!(t)\!)/\mathcal{P}_J$, $[g_0, \ldots, g_n] \mapsto g_0 \cdots g_n\mathcal{P}_J$, が存在することに注意せよ.

定義 6.1. $\gamma \in \Gamma^{\frac{\infty}{2}}_{\mathrm{LS},0}(\gamma_{\check{\lambda}})$ に対して次を導入する:

$$C^{\frac{\infty}{2}}(\gamma) := \bigcap_{w\in W} \pi_{\check{\lambda}}\big(\hat{r}^{-1}_{w_\circ w}(\Xi_w(\gamma))\big).$$

予想 6.2. 任意の $\gamma \in \Gamma^{\frac{\infty}{2}}_{\mathrm{LS},0}(\gamma_{\check{\lambda}})$ に対して $C^{\frac{\infty}{2}}(\gamma) \neq \emptyset$ かつ $C^{\frac{\infty}{2}}(\gamma)$ は有限次元である.

$C^{\frac{\infty}{2}}(\gamma)$ の閉包 $\overline{C^{\frac{\infty}{2}}(\gamma)}$ は次の意味で Mirković–Vilonen サイクルの類似物と見做すことが出来る.

事実 6.3 ([Kam10, GL05, Ehr10]). $\pi_{\check{\lambda}} : \mathrm{BS}(\gamma_{\check{\lambda}}) \twoheadrightarrow \mathcal{X}_{\check{\lambda}} := \overline{G[\![t]\!]\cdot\check{\lambda}} \subset \mathcal{G}_G$, $[g_0, \ldots, g_n] \mapsto g_0 \cdots g_n G[\![t]\!]$, とおく. レトラクション写像 $\hat{r}_{w_\circ w} : \mathrm{BS}(\gamma_{\check{\lambda}}) \twoheadrightarrow \Gamma(\gamma_{\check{\lambda}})$, $w \in W$, を上と同様に定める. 各 $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{LS}}(\gamma_{\check{\lambda}})$ に対して $\Xi_w(\gamma) := w \cdot e^{\max}_w(\gamma) \in \Gamma(\gamma_{\check{\lambda}})$ とおき, 次のように定める:

$$C(\gamma) := \bigcap_{w\in W} \pi_{\check{\lambda}}\big(\hat{r}^{-1}_{w_\circ w}(\Xi_w(\gamma))\big) \subset \mathcal{G}_G.$$

$C(\gamma)$ は空ではなく，$\mathcal{G}_G$ の *Gelfand–Goresky–MacPherson–Serganova* ストラータムを与え，その閉包 $\overline{C(\gamma)} \subset \mathcal{G}_G$ は *Mirković–Vilonen* サイクルを与える．ここで，幾何学的佐武対応により $L(\check{\lambda})$ はベクトル空間として $\mathcal{X}_{\check{\lambda}}$ の交叉ホモロジー群 $\mathrm{IH}_\bullet(\mathcal{X}_{\check{\lambda}})$ と同型になり，*Mirković–Vilonen* サイクルがその基底を成す．更にこの *Mirković–Vilonen* サイクルの成す基底の上にはクリスタルの構造が定まり，対応 $\Gamma_{\mathrm{LS}}(\gamma_{\check{\lambda}}) \ni \gamma \mapsto \overline{C(\gamma)}$ はクリスタルの同型を与える．

参考文献

[ABBGM05] S. Arkhipov, R. Bezrukavnikov, A. Braverman, D. Gaitsgory, and I. Mirković, Modules over the small quantum group and semi-infinite flag manifold, *Transform. Groups* **10** (2005), 279-362.

[BF14] A. Braverman and M. Finkelberg, Weyl modules and q-Whittaker functions, *Math. Ann.* **359** (2014), 45-59.

[BN04] J. Beck and H. Nakajima, Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras, *Duke Math. J.* **123** (2004), 335-402.

[CP01] V. Chari and A. Pressley, Weyl modules for classical and quantum affine algebras, *Represent. Theory* **5** (2001), 191-223.

[Ehr10] M. Ehrig, MV-polytopes via affine buildings, *Duke Math. J.* **155** (2010), 433-482.

[FF90] B. Feigin and E. Frenkel, Affine Kac–Moody algebras and semi-infinite flag manifolds, *Comm. Math. Phys.* **128** (1990), 161-189.

[FM99] M. Finkelberg and I. Mirković, Semi-infinite flags. I. Case of global curve $\mathbb{P}^1$, Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications, *Amer. Math. Soc. Transl.* Ser. 2 **194** (1999), 81-112.

[FFKM99] B. Feigin, M. Finkelberg, A. Kuznetsov, and I. Mirković, Semi-infinite flags. II. Local and global intersection cohomology of quasimaps' spaces, Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications, *Amer. Math. Soc. Transl.* Ser. 2 **194** (1999), 113-148.

[GL05] S. Gaussent and P. Littelmann, LS galleries, the path model, and MV cycles, *Duke Math. J.* **127** (2005), 35-88.

[Kam10] J. Kamnitzer, Mirković–Vilonen cycles and polytopes, *Ann. of Math.* **171** (2010), 245-294.

[Kas94] M. Kashiwara, Crystal bases of modified quantized enveloping algebra, *Duke Math. J.* **73** (1994), 383-413.

[Kas02] M. Kashiwara, On level-zero representations of quantized affine algebras, *Duke Math. J.* **112** (2002), 117-175.

[Kim99] B. Kim, Quantum cohomology of flag manifolds G/B and quantum Toda lattices, *Ann. of Math.* **149** (1999), 129-148.

[Lit95] P. Littelmann, Paths and root operators in representation theory, *Ann. of Math.* **142** (1995), 499-525.

[LNSSS14] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, Quantum Lakshmibai–Seshadri paths and root operators, *Advanced Studies in Pure Mathematics* (Mathematical Society of Japan, Tokyo), 2014, to appear, arXiv:1308.3529.

[LS10] T. Lam and M. Shimozono, Quantum cohomology of G/P and homology of affine Grassmannian, *Acta Math.* **204** (2010), 49-90.

[MV07] I. Mirković and K. Vilonen, Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings, *Ann. of Math.* **166** (2007), 95-143.

[Lus80] G. Lusztig, Hecke algebras and Jantzen's generic decomposition patterns, *Adv. Math.* **37** (1980), 121-164.

[INS14] M. Ishii, S. Naito, and D. Sagaki, Semi-infinite Lakshmibai–Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras, arXiv:1402.3884.

[Ste67] R. Steinberg, Lectures on Chevalley Groups, Mimeographed Notes, Yale University, New Haven, CT (1967).